Correction Devoir surveillé n°0

Exercice 1 (Calcul littéral)

1. Développer et réduire l'expression

$$\begin{aligned} A &= 2x^2 - (x+2)(3x-1) \\ &= 2x^2 - (3x^2 + 6x - x - 2) \\ &= 2x^2 - 3x^2 - 5x + 2 \\ &= \boxed{-x^2 - 5x + 2} \end{aligned}$$

2. Factoriser l'expression

$$\begin{aligned} B &= (2x+3)^2 - 2(4x+1)(2x+3) + (4x+1)^2 \\ &= ((2x+3) - (4x+1))^2 \\ &= (2x + 3 - 4x - 1)^2 \\ &= \boxed{(2-2x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 (Fractions)

Écrire sous la forme la plus simple possible les fractions suivantes.

$$\begin{aligned} C &= \frac{(2x^2-x)(6-3x)}{3x(2-x)} \\ &= \frac{x(2x-1) \times 3 \times (2-x)}{3x(2-x)} \\ &= \boxed{2x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= -\frac{2x+4}{2x} \times \frac{x^2}{2+x} \\ &= -\frac{2(x+2)}{2x} \times \frac{x^2}{2+x} \\ &= \boxed{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{50}{49} \times \frac{49}{48} \times \ldots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} \\ &= \frac{50}{\cancel{49}} \times \frac{\cancel{49}}{\cancel{48}} \times \ldots \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1} \\ &= \boxed{50} \end{aligned}$$

Exercice 3 (Somme de fractions)

1. Le plus petit dénominateur commun entre $4(x+2)(x^2+1)$ et $2(x^2+1)(x-1)$ est

$$\boxed{4(x+2)(x-1)(x^2+1).}$$

2. On écrit $\dfrac{2x+3}{x}$ sous la forme $a + \dfrac{b}{c}$ où $b < c$:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x} &= \frac{2x}{x} + \frac{3}{x} \\ &= \boxed{2 + \frac{3}{x}} \end{aligned}$$

3. On donne $A = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)$. On a alors

$$\begin{aligned} AB &= \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t^2}\right) \times (1+t^2)(1+t) \\ &= \frac{(1+t^2)(1+t)}{1+t} - \frac{(1+t^2)(1+t)}{1+t^2} \\ &= 1 + t^2 - (1+t) \\ &= \boxed{t^2 - t.} \end{aligned}$$

Exercice 4 (Racines carrées et $|\cdot|$)

1. On calcule

$$\begin{aligned} F &= (\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3) \\ &= (\sqrt{5})^2 - 3^2 \\ &= 5-9 \\ &= \boxed{-4} \end{aligned}$$

2. On a $\boxed{\text{G = |-14| = 14}}$.
3. On calcule

$$\begin{aligned} H &= \frac{x}{\sqrt{x}-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} + \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \boxed{\frac{x\sqrt{x}+4x+\sqrt{x}-4}{x-16}} \end{aligned}$$

Exercice 5 (Puissances)

Écrire les expressions suivantes sous la forme x^a.

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3 \times x^{-2}}{x^5} \\ &= \frac{x}{x^5} \\ &= \boxed{x^{-4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{x} \times \frac{x^2}{(-x)^4 x^{-1}} \quad = x^{1/2} \times \frac{x^2 \times x}{x^4 \times (-1)^4} \\ &= x^{1/2} \times x^{-1} \\ &= x^{-1/2} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Équations)

1. On résout la première équation en factorisant

$$\begin{aligned} (1) &\iff (2x+1)^2 - 25 = 0 \\ &\iff (2x+1-5)(2x+1+5) = 0 \\ &\iff (2x-4)(2x+6) = 0 \end{aligned}$$

Or $2x-4=0 \iff x=2$ et $2x+6=0 \iff x=-3$ donc

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{-3; 2\}.}$$

2. L'équation $(\ln(x)-1)(2-5\ln(x))=0$ étant déjà factorisé, on a d'une part

$$\ln(x)-1=0 \iff \ln(x)=1 \iff x=e$$

et d'autres part

$$2-5\ln(x)=0 \iff \ln(x)=\frac{2}{5} \iff x=e^{2/5}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{e^{2/5}; e\right\}.}$$

Exercice 7 (Logarithme et exponentielle)
On simplifie les expressions suivantes

$$\begin{aligned} K &= \ln\left(\frac{\sqrt{8}+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{8}-2}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{8}+2}{2} \times \frac{\sqrt{8}-2}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4} \times (\sqrt{8}+2)(\sqrt{8}-2)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4} \times (8-4)\right) \\ &= \boxed{\ln(1) = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \ln(\sqrt{e}^3) \\ &= 3\ln(\sqrt{e}) \\ &= \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 8 (Inéquations)

1. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} \frac{2x}{5} - \frac{1}{3} \leq -\frac{4}{15} &\Longleftrightarrow 6x - 5 \leq -4 \\ &\Longleftrightarrow 6x \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow x \leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_1 = \left]-\infty; \frac{1}{6}\right].}$$

2. On résout l'inéquation

$$2x^2 - 4x \geq 0 \Longleftrightarrow 2x(x-2) \geq 0$$

On réalise alors un tableau de signe pour déterminer quand l'expression de droite est positive

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $2x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_2 =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[.}$$

3. On résout l'inéquation

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-5} < \frac{1}{2x+1} &\Longleftrightarrow \frac{1}{x-5} - \frac{1}{2x+1} < 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{2x+1}{(2x+1)(x-5)} - \frac{x-5}{(2x+1)(x-5)} < 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{2x+1-x+5}{(2x+1)(x-5)} < 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x+6}{(2x+1)(x-5)} < 0 \end{aligned}$$

On a alors le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		-6		$-1/2$		5		$+\infty$
Signe de $x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{x+6}{(2x+1)(x-5)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S}_3 =]-\infty;-6[\cup\left]-\frac{1}{2};5\right[.}$$

Exercice 9 (Fonctions)
Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1;10]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 15\ln(x)$.

1. La fonction f est dérivable sur $[1,10]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout $x \in [1,10]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x + 2 + \frac{15}{x} \\ &= \boxed{\frac{-x^2+2x+15}{x}} \end{aligned}$$

2. Afin de dresser le tableau de variation, on cherche le signe de la dérivée. On résout pour cela l'équation $-x^2+2x+15=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 4\times(-1)\times 15 = 64$. Il y a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-2-8}{(-2)} = 5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2+8}{(-2)} = -3$$

On calcule alors $f(1) = -\dfrac{1}{2} + 2 + 15\ln(1) = \dfrac{3}{2}$, $f(5) = -\dfrac{5}{2} + 15\ln(5) \approx 21,6$ et $f(11) = -\dfrac{77}{2} + 15\ln(11) \approx -2,5$ On en déduit le tableau de variation suivant.

x	1		5		10
Signe de $-x^2+2x+15$		$+$	0	$-$	
Signe de x		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	≈ 21.6	$\searrow$	-2.5

3. (a) Sur l'intervalle $[1;5]$ la fonction admet un minimum en $x=1$ valant $\frac{3}{2}$. La fonction est donc strictement positive sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[5;11]$,
   - La fonction f est continue (on a montré précédemment qu'elle était dérivable)
   - La fonction est strictement décroissante sur cet intervalle.
   - $f(5)>0$ et $f(11)<0$.

   Donc, d'après le théorème de la bijection,

   $$\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution sur } [5;11] \text{ et donc sur } [1;11].}$$

   On notera cette solution α (alpha) et on suppose que $\alpha \approx 10.66$

   (b) D'après les variations de f et la question précédente,

   $$\boxed{f(x)\geq 0 \text{ pour } x\in[1;\alpha] \text{ et } f(x)<0 \text{ pour } x\in]\alpha;11].}$$

4. (a) On considère la fonction F définie sur $[1;10]$ par $F(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2-15x+15x\ln(x)$. La fonction F est dérivable sur $[1;11]$ en tant que somme de fonctions dérivables et

   $$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{1}{6}\times 3x^2+2x-15+15\ln(x)+15\frac{x}{x} \\ &= -\frac{1}{2}x^2+2x+15\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc une primitive de la fonction } f.}$$

   (b) On calcule

   $$\begin{aligned} \int_1^{10} f(x)dx &= \left[-\frac{1}{6}x^3+x^2-15x+15x\ln(x)\right]_1^{10} \\ &= -\frac{1000}{6}+100-150+150\ln(10)-\left(-\frac{1}{6}+1-15+0\right) \\ &= -\frac{1300}{6}+150\ln(10)-\left(-\frac{85}{6}\right) \\ &= \boxed{150\ln(10)-\frac{405}{2}} \end{aligned}$$

   (c) Par définition de la valeur moyenne, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;10]$ est

   $$\boxed{M=\frac{1}{10-1}\int_1^{10} f(x)dx=\frac{50}{3}\ln(10)-\frac{45}{2}.}$$

Partie B

1. Cela revient à résoudre l'inéquation $f(x)\geq 0$. D'après la question $A3(b)$, pour obtenir un bénéfice mensuel positif,

   $$\boxed{\text{la société doit produire et vendre entre 100 et 1066 chaises (valeur approchée de } \alpha).}$$

2. D'après le tableau de variation de la partie A. On a un maximum atteint en $x=5$.

   $$\boxed{\text{La société doit donc produire et vendre 500 chaises pour que son bénéfice soit maximal.}}$$

Exercice 10 (Probabilités)
Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif.On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.
T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.
Les résultats seront données de manière exacte.

1. Arbre pondéré décrivant la situation :

2. On calcule

$$\begin{aligned} P(S \cap T) &= P(S) \times P_S(T) \\ &= 0,7 \times 0,8 \\ &= \boxed{0,56} \end{aligned}$$

3. Les évènements $(S, \overline{S})$ forment un Système Complet d'évènements. D'après la formule des probabilité totale :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) \\ &= P(S) \times P_S(T) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(T) \\ &= 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 \\ &= 0,56 + 0,03 \\ &\boxed{= 0,59} \end{aligned}$$

4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif. On cherche alors la probabilité $P_{\overline{T}}(S)$. En utilisant la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_{\overline{T}}(S) &= \frac{P(S)}{P(\overline{T})} P_S(\overline{T}) \\ &= \frac{0,7}{0,41} \times 0,2 \\ &= \frac{14}{41} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{14}{59} = \dfrac{140}{590}$ et $\dfrac{1}{10} = \dfrac{59}{590}$. Ainsi, $\dfrac{14}{59} > \dfrac{1}{10}$ et donc

$\boxed{\text{la probabilité que l'élève se dise sensible au tri selectif est supérieur à 10\%.}}$

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés. Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.
   (a) On répète de façon identique et indépendante, 4 fois une épreuve de Bernoulli ayant pour probabilité de succès $0,7$.
   $$\boxed{X \text{ suit donc une loi binomiale de paramètre } 4 \text{ et } 0,59.}$$
   (b) La probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif est donné par
   $$\boxed{P(X=0) = (0,41)^4.}$$

Exercice 11 (Suites)
Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 10 % chaque année. Au 1^{er} janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes. À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1^{er} janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année 2004 + n. On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. (a) Au 1^{er} janvier 2005, la population de singe est
   $$\boxed{u_1 = 25000 - 0,1 \times 25000 = 0,9 \times 25000 = 22500.}$$
   (b) Au 1^{er} janvier 2006, la population de singe est
   $$\boxed{u_2 = 22500 - 0,1 \times 22500 = 0,9 \times 22500 = 20250.}$$
2. On a pour tout n entier $u_{n+1} = 0,9^n u_n$ avec $u_0 = 25000$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $0,9$. Ainsi
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 25000 \times (0,9)^n.}$$
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1^{er} janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous.

```
L1 : Variables        u un réel, n un entier
L2 : Initialisation   u prend la valeur ..25000..
L3 :                  n prend la valeur ..0..
L4 : Traitement       Tant que ..u > 5000.. faire
L5 :                      u prend la valeur ..0,9 * u..
L6 :                      n prend la valeur .. n + 1 ..
L7 :                  Fin Tant que
L8 : Sortie           Afficher n
```

Partie B

Au 1^{er} janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances. On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. (a) On a tout d'abord

$$\boxed{v_1 = \frac{3}{4} \times 5000 + 400 = 3 \times 1250 + 400 = 4150}$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n + 400.}$$

(c) On résout l'équation

$$\begin{aligned} x = \frac{3}{4}x + 400 &\iff \frac{1}{4}x = 400 \\ &\iff x = 1600. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } x_0 = 1600.}$$

(d) On pose alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n - x_0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 1600 \\ &= \frac{3}{4}v_n + 400 - 1600 \\ &= \frac{3}{4}(w_n + 1600) - 1200 \\ &= \frac{3}{4}w_n. \end{aligned}$$

De plus $w_0 = 5000 - 1600 = 3400$.

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc une suite géométrique de raison } \frac{3}{4} \text{ et de premier terme } 3400.}$$

(e) Pour tout entier n,on a

$$\boxed{w_n = 3400 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n.}$$

(f) On en déduit que pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{v_n = w_n + 1600 = 1600 + 3400 \times 0,75^n.}$$

(g) La limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1600. Cela signifie qu'au bout d'un temps suffisamment grand, la population de singe se stabilisera autour de 1600 individus.

Exercice 12 ()

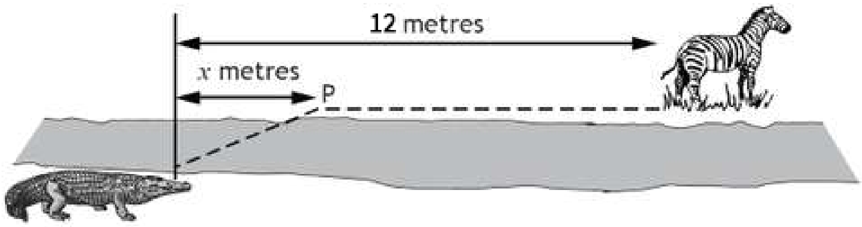
Un crocodile a repéré une proie située à 12 mètres de lui sur la berge opposée d'une rivière. Le crocodile se déplace à une vitesse différente sur terre et dans l'eau. Le temps que met le crocodile à atteindre le zèbre peut être réduit s'il traverse la rivière en visant un certain point P, placé à x mètres du point de départ sur l'autre rive (voir schéma).

Le temps T nécessaire pour faire le trajet est donné par l'équation indiquée ci-dessous (en dixièmes de seconde) :

$$T(x) = 2\sqrt{81 + x^2} + (12 - x).$$

1. Pour Calculer en combien de temps le crocodile rejoindra le zèbre uniquement à la nage, on étudie

$$\begin{aligned} T(12) &= 2\sqrt{81 + 144} + (12 - 12) \\ &= 2\sqrt{225} \\ &= 2 \times 15 \\ &\boxed{= 30} \end{aligned}$$



2. Pour calculer en combien de temps le crocodile rejoindra le zèbre s'il coupe la rivière au plus court, on étudie

$$\begin{aligned} T(0) &= 2\sqrt{81+0} + (12-0) \\ &= 2 \times 9 + 12 \\ &\boxed{= 30} \end{aligned}$$

3. On cherche le minimum de la fonction T entre 5 et 6. Pour cela, on étudie la fonction T. Cette fonction est dérivable sur $[5;6]$ en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} T'(x) &= 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{81+x^2}} - 1 \\ &= \frac{2x}{\sqrt{81+x^2}} - 1 \end{aligned}$$

Il est très difficile d'étudier le signe d'une telle fonction. Néanmoins, cette fonction est elle même dérivable sur $[5,6]$ et

$$\begin{aligned} T''(x) &= \frac{2\sqrt{81+x^2} - 2x\dfrac{2x}{2\sqrt{81+x^2}}}{81+x^2} \\ &= \frac{\dfrac{2(\sqrt{81+x^2})^2}{\sqrt{81+x^2}} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{81+x^2}}}{81+x^2} \\ &= \frac{2(81+x^2) - 2x^2}{(81+x^2)\sqrt{81+x^2}} \\ &= \frac{162}{(81+x^2)\sqrt{81+x^2}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction T' est donc strictement croissante. C'est une fonction continue et de plus,

$$T'(5) = \frac{2 \times 5}{\sqrt{81+25}} - 1 = \frac{10}{\sqrt{106}} - 1 < 0$$

et

$$T'(6) = \frac{2 \times 6}{\sqrt{81+36}} - 1 = \frac{12}{\sqrt{117}} - 1 > 0$$

D'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution $\alpha \in [5;6]$ à l'équation $T'(x) = 0$. En ce point, la dérivée s'annule et donc

$$\boxed{\text{la valeur minimisant le temps de l'alligator est } \alpha.}$$